



ЛИРА
СОФТ

Развитие библиотеки конечных элементов ПК ЛИРА 10

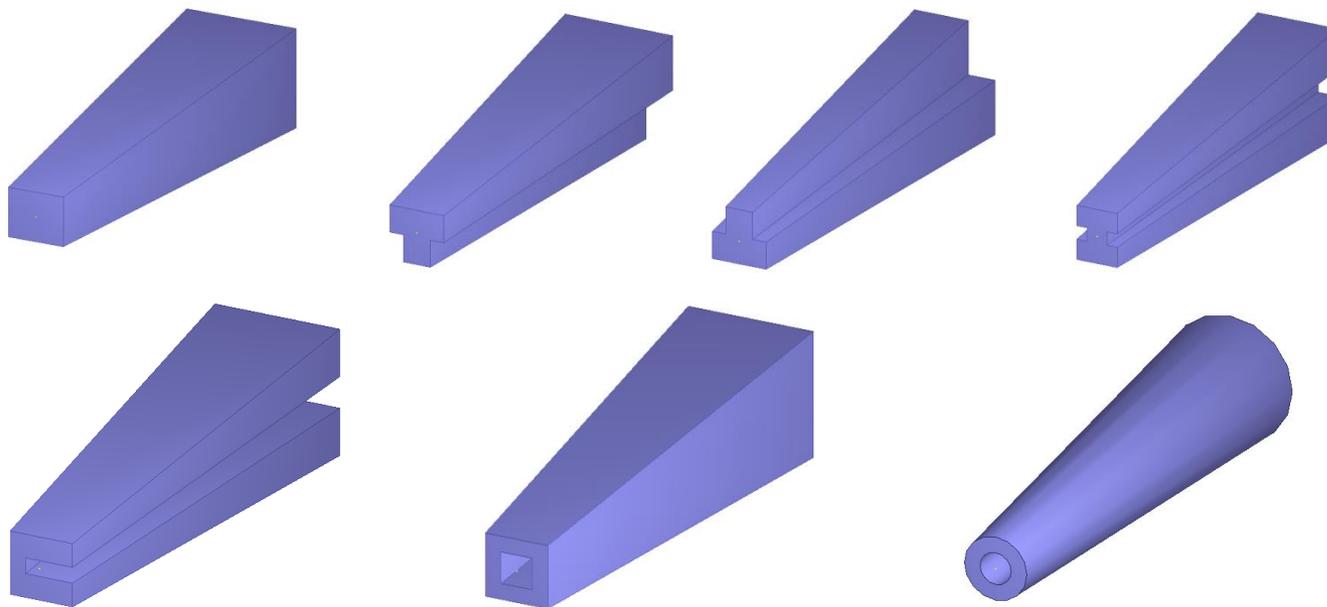
Евзеров И. Д.



lira-soft.com

Стержень переменного сечения

- Размеры сечения линейно изменяются по длине стержня.
- При построении матрицы жесткости используются базисные функции, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия.
- Построены матрицы масс и устойчивости.
- Реализованы основные типы сечений: брус, двутавр, швеллер и т.д.



Тонкостенный стержень

Стержень с секториальным моментом инерции (теория Власова):
Статика, устойчивость, динамика.

$$\int_l [EI_{\omega} (\alpha_1'')^2 + GI_1 (\alpha_1')^2] dx_1 / 2.$$

$$m_1 = x_3^0 f_2 - x_2^0 f_3.$$

Реализованы основные типы сечений: брус, двутавр, швеллер и т.д.,
а также переменные сечения.

Построены матрицы масс и устойчивости.

Уравнение равновесия при стесненном кручении имеет вид:

$$EI_{\omega} \alpha''' - GI_k \alpha'' = m \quad (1)$$

Оно отличается (формально) от уравнения для изгиба наличием слагаемого $-GI_k \alpha''$.
Базисные функции для изгиба - многочлены третьей степени. Они могут применяться и для стесненного кручения, однако более точные результаты дает использование общего решения однородного уравнения (1)

$$\alpha = A + Bx + Csh(\lambda x) + Dch(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{GI_k / EI_{\omega}} \quad (2)$$

Построение базисных функций и матрицы жесткости из (2) обычно выполняется на отрезке $[0, L]$. Это приводит к решению четырех систем линейных уравнений четвертого порядка.

Значительно проще выполнить построение на отрезке $[-l, l]$, $l = L/2$, используя четность и нечетность функций 1 , $ch(\lambda x)$ и x , $sh(\lambda x)$ соответственно. Система уравнений четвертого порядка на $[-l, l]$ имеет вид ($\nu = \lambda l$)

$$\begin{aligned} A - Bl - Csh\nu + Dch\nu &= a_1, & A + Bl + Csh\nu + Dch\nu &= a_3 \\ B + \lambda Cch\nu - \lambda Dsh\nu &= a_2, & B + \lambda Cch\nu + \lambda Dsh\nu &= a_4 \end{aligned} \quad (3)$$

Для каждой из четырех систем одно из чисел a_i равно единице, остальные - нулю.

Она распадается на две легко решаемые системы второго порядка

$$\begin{aligned} 2A + 2Dch\nu &= a_1 + a_3, & 2\lambda Dsh\nu &= a_4 - a_2 \\ 2Bl + 2Csh\nu &= a_3 - a_1, & 2B + 2\lambda Cch\nu &= a_4 + a_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Элементы матрицы жесткости вычисляются по известным формулам

$$K_{ij} = a(\mu_i, \mu_j),$$

где функционал потенциальной энергии стесненного кручения имеет вид

$$a(\alpha, \beta) = \int_{-l}^l (EI_{\omega} \alpha'' \beta'' + GI_k \alpha' \beta') dx \quad (5)$$

Явное вычисление интегралов вида (5) достаточно громоздко. Применим формулу интегрирования по частям и воспользуемся тем, что базисные функции удовлетворяют однородному уравнению (1). Тогда

$$\begin{aligned} a(\alpha, \beta) = & EI_{\omega} \alpha''(l) \beta'(l) - EI_{\omega} \alpha''(-l) \beta'(-l) \\ & - (EI_{\omega} \alpha'''(l) - GI_k \alpha'(l)) \beta(l) + (EI_{\omega} \alpha'''(-l) - GI_k \alpha'(-l)) \beta(-l) \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (3) и очевидные формулы

$$EI_{\omega} \mu''(x) = GI_k (Csh(\lambda x) + Dch(\lambda x)), EI_{\omega} \mu'''(x) - GI_k \mu'(l) = GI_k B \quad (7)$$

Получаем

$$\begin{aligned} K_{11} &= GI_k \lambda / \omega, K_{12} = GI_k th\nu / \omega, \\ K_{22} &= GI_k (lth\nu / \omega + 0.5 / (\nu th\nu)), K_{24} = GI_k (lth\nu / \omega - 0.5 / (\nu th\nu)), \\ K_{33} &= K_{11}, K_{44} = K_{22}, K_{13} = -K_{11}, K_{14} = K_{34} = K_{12}, K_{23} = -K_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в (8) нет экспоненциально растущих величин $sh\nu, ch\nu$.

Для вычисления усилий в начале и конце стержня, как и для изгиба, достаточно, в соответствии с (6), умножить матрицу жесткости элемента на вектор узловых перемещений и откорректировать на вектор нагрузок.

Для вычисления усилий в произвольной точке стержня при изгибе применяется метод начальных параметров, основанный на интегрировании уравнения равновесия.

При стесненном кручении формулы аналогичны:

$$EI_{\omega} \alpha'''(x) - GI_k \alpha'(x) = EI_{\omega} \alpha'''(0) - GI_k \alpha'(0) + \int_0^x m ds \quad (9)$$

$$EI_{\omega} \alpha''(x) = EI_{\omega} \alpha''(0) + x(EI_{\omega} \alpha'''(0) - GI_k \alpha'(0)) + \int_0^x (x-s)m ds + GI_k \alpha(x) - GI_k \alpha(0) \quad (10)$$

Слагаемое $GI_k \alpha(x) - GI_k \alpha(0)$ вычисляется из (2). Но при наличии распределенных по элементу нагрузок нужно получить точные значения $\alpha(x)$ при этих нагрузках. Для этого решаем уравнение (1) с нулевыми граничными условиями и прибавляем полученное решение к конечно-элементному.

Шестое узловое неизвестное для пластин

В функционал потенциальной энергии добавляется слагаемое:

$$G\delta \int_{\Omega} (\alpha_3 - (\partial U_2 / \partial x_1 - \partial U_1 / \partial x_2) / 2)^2 dx_1 dx_2.$$

- Физически нелинейные стержни и оболочки с учетом сдвига.
- Геометрически нелинейный стержень с учетом секториального момента инерции.
- Новый алгоритм конденсации масс.

Элементы грунта:

- Исправлена ошибка в алгоритме учета различных модулей объемной деформации при нагрузке и разгрузке;
- Исправлено вычисление коэффициента запаса по сдвигу;
- Разработаны элементы неотражающей границы для динамических расчетов.

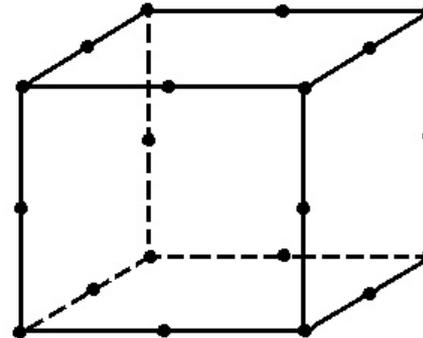
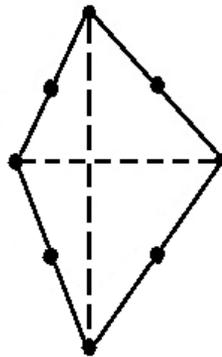
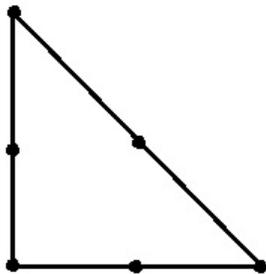
Неотражающие граничные условия:

$$\sigma_n = c_n \rho u_n, \quad \sigma_\tau = c_\tau \rho u_\tau,$$

где, c_n, c_τ - скорости продольной и поперечной волн.

Новые конечные элементы с узлами на серединах сторон

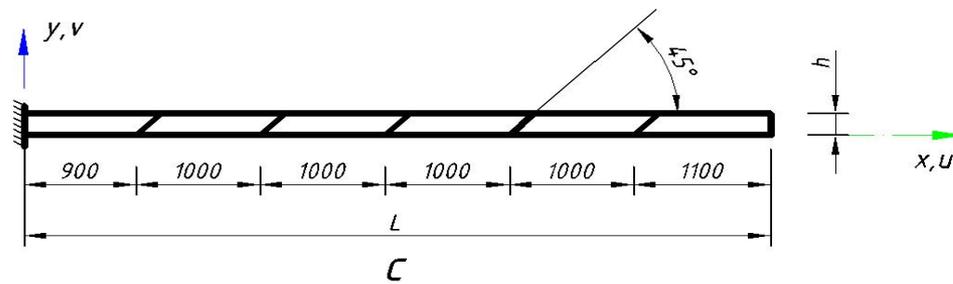
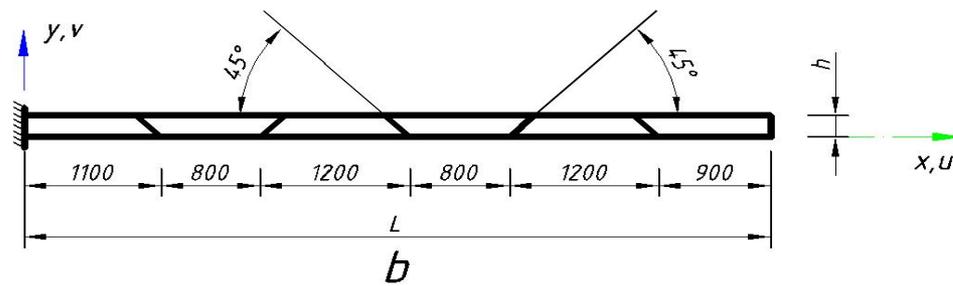
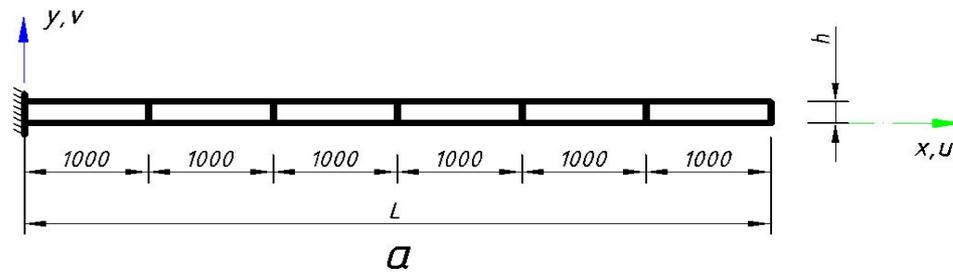
- Пластины: треугольник, четырехугольник.
- Объемные элементы: тетраэдр, треугольная и четырехугольная призмы.

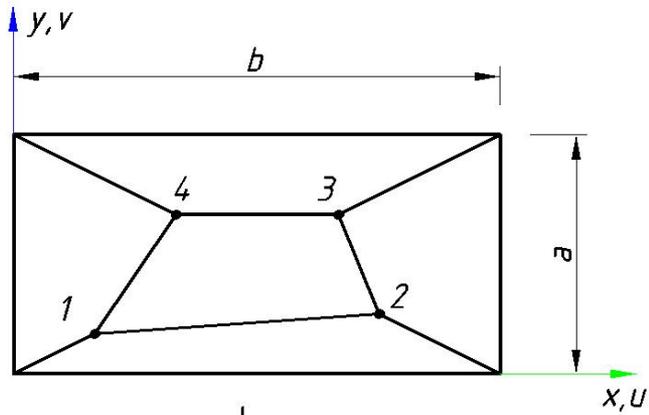


Плоские элементы переводятся в стандартные линейным преобразованием, объемные – изопараметрически, с помощью своих базисных функций.

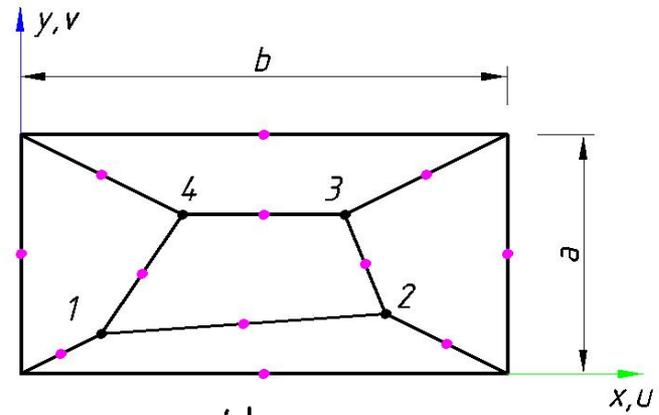
Погрешность МКЭ

- Пропорциональна h^p .
- Для элементов балок-стенок и объемных:
 - без промежуточных узлов $p=1$;
 - с промежуточными узлами $p=2$.

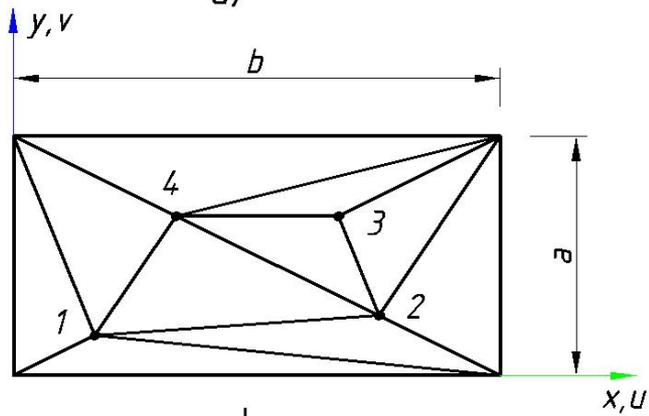




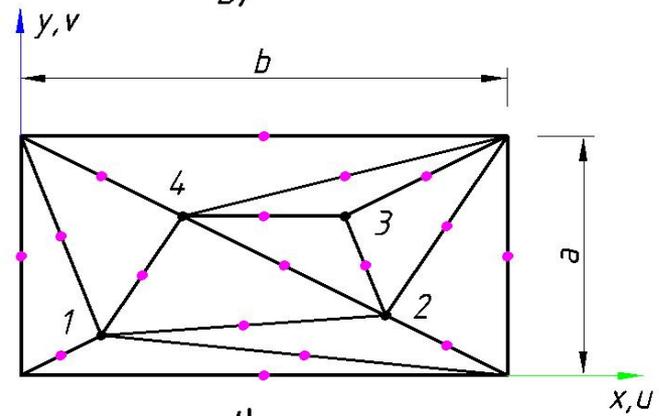
a)



b)



c)



d)

СВОБОДНОЕ И СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ

Ось x_1 направлена вдоль прямолинейной оси стержня, оси x_2, x_3 – главные центральные оси сечения A ,
 $EA = \int_A E dA$, $EI_2 = \int_A E x_3^2 dA$, $EI_3 = \int_A E x_2^2 dA$ – жесткости, $n = (0, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к границе сечения Γ , x_2^0, x_3^0 – координаты центра кручения. Штрихами обозначается дифференцирование по x_1 . Модуль Юнга E и модуль сдвига $G = E/(1 + \mu)$ могут быть переменными в A .

Поскольку размеры сечения существенно меньше длины стержня, предполагается, что $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$. Эти условия удовлетворяются, если положить (решение Сен-Венана [1,2,3])

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \alpha_1' \phi \\ U_2(x) &= -(x_3 - x_3^0) \alpha_1 \\ U_3(x) &= (x_2 - x_2^0) \alpha_1 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\phi = \psi - x_3^0 x_2 + x_2^0 x_3 - c$,

функция ψ зависит только от x_2, x_3 , функция α_1 – только от x_1 .

Предположим отсутствие распределенных нагрузок и вычислим деформации и напряжения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= \alpha'_1 (\partial \psi / \partial x_2 - x_3) / 2, \\ \varepsilon_{13} &= \alpha'_1 (\partial \psi / \partial x_3 + x_2) / 2, \\ \sigma_{11} &= 0, \sigma_{12} = G \varepsilon_{12}, \sigma_{13} = G \varepsilon_{13}.\end{aligned}\tag{2}$$

Для определения функции ψ воспользуемся линейными однородными уравнениями равновесия

$$-\partial \sigma_{kj}(U) / \partial x_j = 0\tag{3}$$

и граничными условиями

$$\sigma_{kj}(U) n_j = 0.\tag{4}$$

При $k = 2, 3$ получаем тождества, при $k = 1$ имеем

$$\partial \sigma_{11} / \partial x_1 + \partial \sigma_{12} / \partial x_2 + \partial \sigma_{13} / \partial x_3 = 0 \text{ в } A,\tag{5}$$

$$\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \text{ на } \Gamma.\tag{6}$$

Подставив (2) и приравняв нулю коэффициенты при α'_1 , получим уравнения в A

$$\begin{aligned} & -\partial(G \cdot \partial(\psi / \partial x_2 - x_3)) / \partial x_2 - \\ & -\partial(G \cdot (\psi / \partial x_3 + x_2)) / \partial x_3 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и граничные условия на Γ

$$\begin{aligned} & G \cdot ((\partial \psi / \partial x_2 - x_3) \cdot n_2 + \\ & + (\partial \psi / \partial x_3 + x_2) \cdot n_3) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Задача Неймана (7), (8) имеет единственное (с точностью до аддитивной постоянной c) решение, если

$$\int_{\Gamma} (-x_3 \cdot n_2 + x_2 \cdot n_3) d\Gamma = 0. \quad (9)$$

Равенство (9) следует из формулы Грина

$$\int_{\Omega} \partial U / \partial x_j V d\Omega = -\int_{\Omega} U \partial V / \partial x_j d\Omega + \int_{\Gamma} UV n_j d\Gamma. \quad (10)$$

Применив формулу Грина, получаем вариационную формулировку задачи (7), (8):

$$\int_A G \cdot ((\partial \psi / \partial x_2 - x_3) \cdot \partial v_i / \partial x_2 + (\partial \psi / \partial x_3 + x_2) \cdot \partial v_i / \partial x_3) dA = 0. \quad (11)$$

Функцию ψ находим из (11) методом конечных элементов, определяем x_2^0 , x_3^0 и c из условий

$$\int_A Ex_2 \phi dA = \int_A Ex_3 \phi dA = \int_A E \phi dA = 0:$$

$$x_2^0 = -\int_A Ex_3 \psi dA / EI_2, \quad x_3^0 = \int_A Ex_2 \psi dA / EI_3, \quad c = \int_A E \psi dA / E | A|. \quad (12)$$

Вычисляем жесткость при свободном кручении GI_1 и секториальную жесткость EI_ω :

$$GI_1 = \int_A G \cdot ((\partial \psi / \partial x_2 - x_3)^2 + (\partial \psi / \partial x_3 + x_2)^2) / 2 dA, \quad EI_\omega = \int_A E \phi^2 dA. \quad (13)$$

Изложенный метод распространяется и на тонкостенные сечения. Конечные элементы – прямоугольники, искомая функция на каждом прямоугольнике представляется в виде

$$\psi(y_2, y_3) = \psi_1(y_2) + y_3 \psi_2(y_2), \quad (14)$$

где оси y_2, y_3 направлены вдоль длинной и короткой, "тонкостенной", сторон.

Подставив (14) в (11), получим вариационную формулировку для тонкостенного сечения.

Такой подход универсален и не требует различных алгоритмов, приведенных, например, в [4], для открытых, замкнутых, полузамкнутых и т.д. сечений.

Mos011.fep

Файл Вид Выбор Расчет Редакторы Конструирование Результаты Спец. результаты Анализ Документирование Сервис Контроль Справка

Таблицы

Формирование таблиц

Показывать сокращенный список

Модель
 Протокол расчета
 Геометрические характеристики попер...

Для выделенных элементов

Текущее нагружение
 Все нагружения
 Выборочно

Отметьте нагружения, для которых следует создать таблицу

Сформировать

Индикация отмеченных строк

Параметры эквивалентных напряжений

Параметры печати

Главный вид

Отметка Z=0

Геометрические характе...

Обозначение	Значение	Единицы измер
Крутильные характеристики		
Координаты центра кручения в местной системе координат	Y1t	0
	Z1t	0
Момент инерции при свободном кручении	It	8107.34
Секториальный момент инерции	Iw	328.059
Момент сопротивления при свободном кручении	Wt	803.194
Секториальный момент сопротивления	Ww	832.029
Сдвиговые характеристики		
Координаты центра сдвига (изгиба) в местной системе координат	Y1s	0
	Z1s	0
Сдвиговая площадь по нормали к оси Y1	Fy1	55.4969
Сдвиговая площадь по нормали к оси Z1	Fz1	55.4969
Момент сопротивления сдвигу вдоль оси Y1	WQy1	50.3691
Момент сопротивления сдвигу вдоль оси Z1	WQz1	50.3691

X: Y: Z: 237/-/ 240/-/

Mos02.fep (FPS=62.5)

Файл Вид Выбор Расчет Редакторы Конструирование Результаты Спец. результаты Анализ Документирование Сервис Контроль Справка

Таблицы

Формирование таблиц

Показывать сокращенный список

Модель
 Протокол расчета
 Геометрические характеристики попер...

Для выделенных элементов

Текущее нагружение
 Все нагружения
 Выборочно

Отметьте нагружения, для которых следует создать таблицу

Сформировать

Индикация отмеченных строк

Параметры эквивалентных напряжений

Параметры печати

Главный вид

Отметка Z=0

Геометрические характе... X

Обозначение	Значение	Единицы измер
Полярный радиус инерции	r_p	8.75294
Крутильные характеристики		
Координаты центра кручения в местной системе координат	Y_{1t}	-2.7497
	Z_{1t}	-2.7497
Момент инерции при свободном кручении	I_t	3304.96
Секториальный момент инерции	I_w	14031.1
Сдвиговые характеристики		
Координаты центра сдвига (изгиба) в местной системе координат	Y_{1s}	-2.74993
	Z_{1s}	-2.74993
Сдвиговая площадь по нормали к оси Y1	F_{y1}	48.4808
Сдвиговая площадь по нормали к оси Z1	F_{z1}	48.4808
Жесткостные характеристики		
Продольная жесткость	EE	0.084

X: Y: Z: 237/-/ 240/-/

MS_07.fep

Файл Вид Выбор Расчет Редакторы Конструирование Результаты Спец. результаты Анализ Документирование Сервис Контроль Справка

Таблицы

Формирование таблиц

Показывать сокращенный список

Модель
 Протокол расчета
 Геометрические характеристики попер...

Для выделенных элементов

Текущее нагружение
 Все нагружения
 Выборочно

Отметьте нагружения, для которых следует создать таблицу

Сформировать

Индикация отмеченных строк

Параметры эквивалентных напряжений

Параметры печати

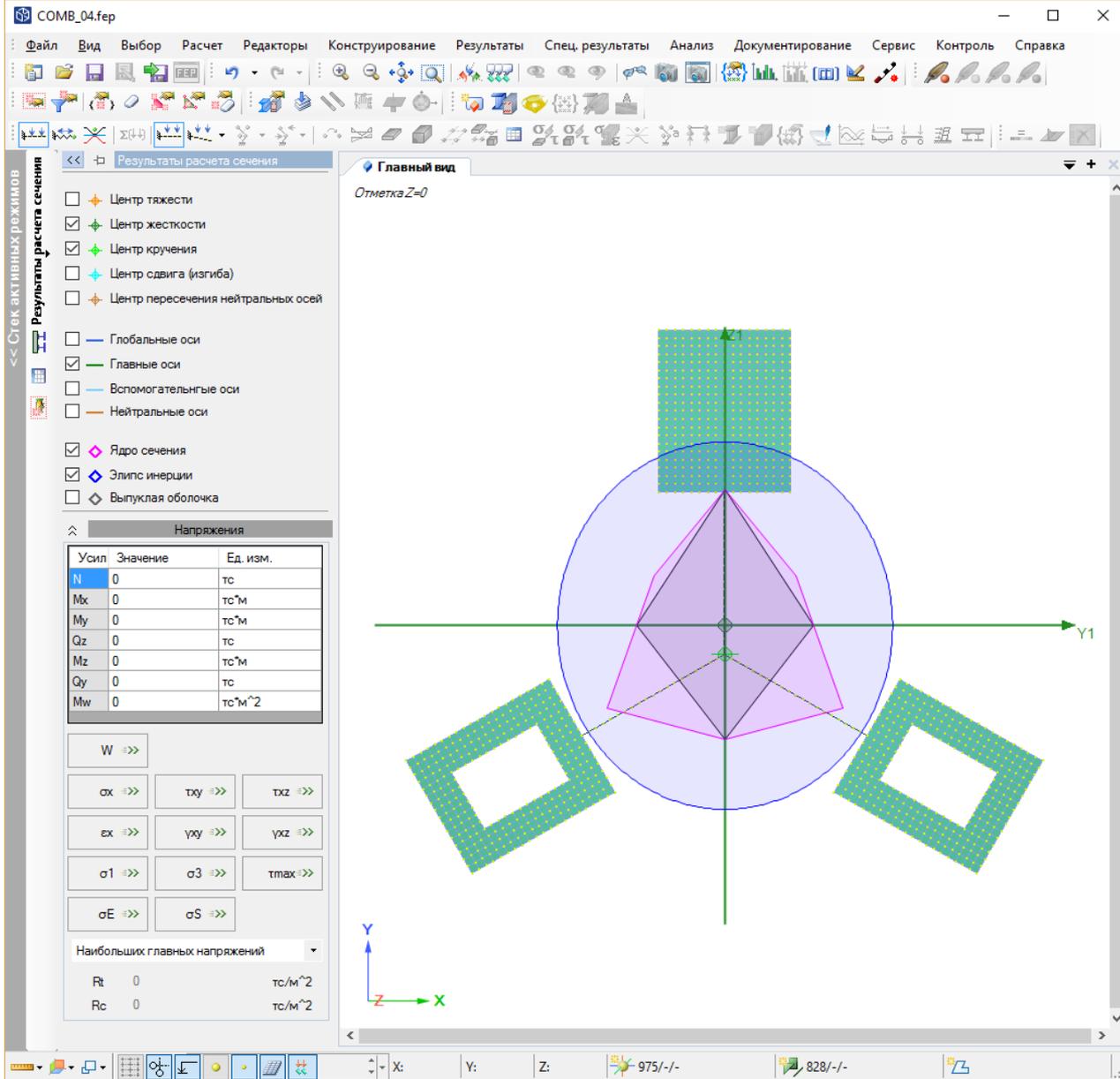
Главный вид

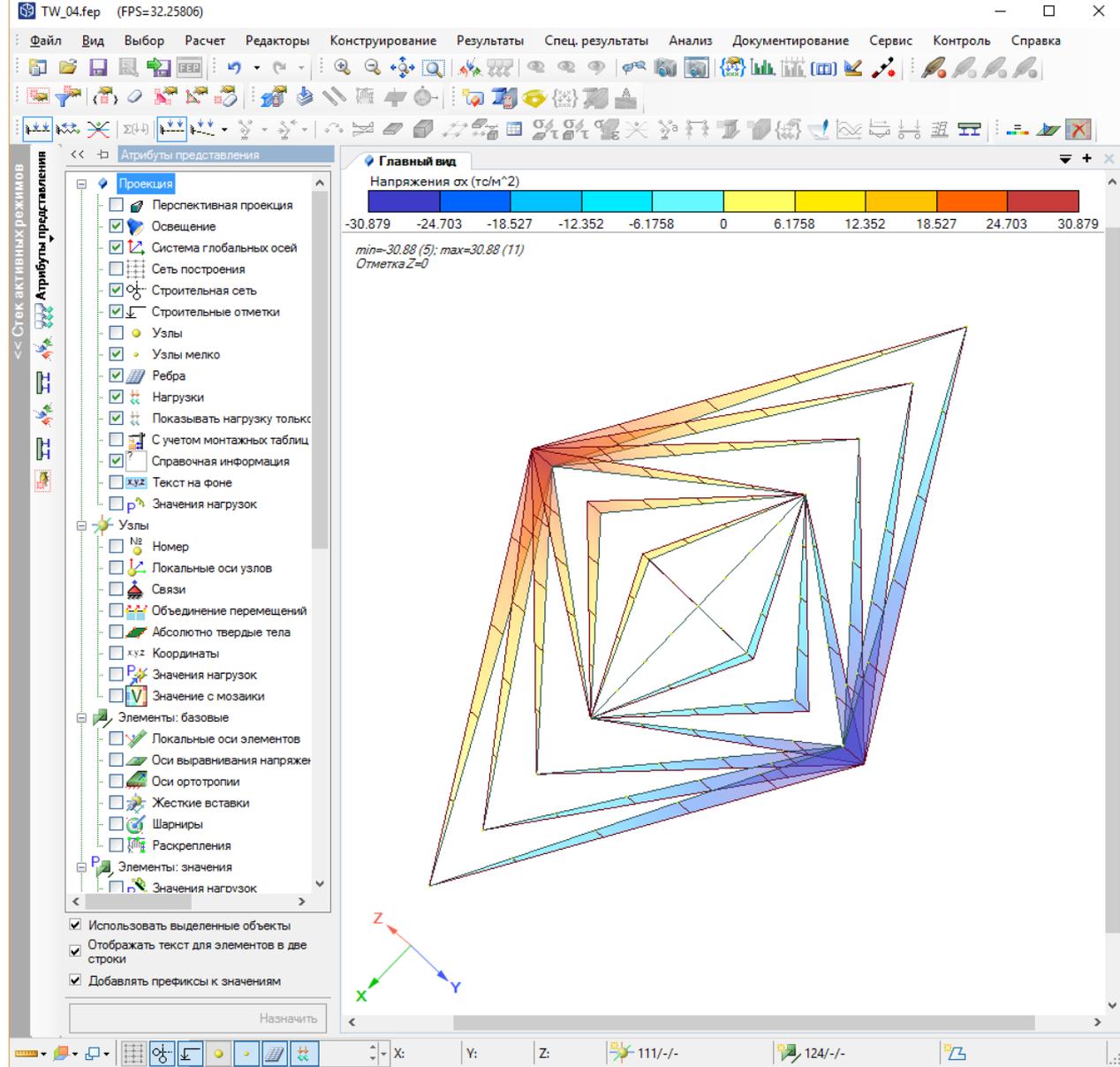
Отметка Z=0

Геометрические характе...

Обозначение	Значение	Единицы измерения
Пластический момент сопротивления изгибу относительно оси Zpl	Wzpl	42.8391
Крутильные характеристики		
Координаты центра кручения в местной системе координат	Y1t	0
	Z1t	0
Момент инерции при свободном кручении	It	42.5539
Секториальный момент инерции	Iw	82.1336
Момент сопротивления при свободном кручении	Wt	7.90159
Секториальный момент сопротивления	Ww	20.5882
Сдвиговые характеристики		
Координаты центра сдвига (изгиба) в местной системе координат	Y1s	0
	Z1s	0
Сдвиговая площадь по нормали к оси Y1	Fy1	0.89212
Сдвиговая площадь по нормали к оси Z1	Fz1	0.89212

X: Y: Z: 205/-/ 224/-/ Z





Задача теплопроводности

Рассматривается (пока) стационарная задача

$$- \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) = q, \quad (1)$$

T - температура, q - плотность источников тепла, K - коэффициент теплопроводности, $Q = -K \operatorname{grad} T$ - тепловой поток.

Для применения МКЭ нужно интегральное тождество, аналогичное принципу возможных перемещений. Его получаем из (1) и формулы Грина интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} q * t * d\Omega = \int_{\Omega} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) * t * d\Omega = \int_{\Omega} K \operatorname{grad} T * \operatorname{grad} t * d\Omega - \int_{\Gamma} K \partial T / \partial n * t * d\Gamma. \quad (2)$$

Здесь t - вариация T .

Возможны три варианта граничных условий:

- 1) На части границы Γ_1 задана температура $T = T_0$;
- 2) На части границы Γ_2 задан тепловой поток $Q = Q_0$;
- 3) На части границы Γ_3 происходит теплообмен с окружающей средой по закону $Q + k(T - T_1) = 0$, k - коэффициент теплообмена, T_1 - температура окружающей среды;

Граничное условие 1) реализуется аналогично заданным перемещениям,

Граничное условие 2) реализуется аналогично нагрузке по поверхности или линии.

Граничное условие 3) реализуется аналогично упругой опоре с жесткостью k , кроме того, добавляется нагрузка $k * T_1$.

Фильтрация

Рассматривается (пока) стационарная задача

$$- \operatorname{div}(K \operatorname{grad} h) = 0, \quad (1)$$

$$h = p / \rho g + z, \quad (2)$$

p - плотность воды, K - коэффициент фильтрации, $v = -K \operatorname{grad} h$.

Для применения МКЭ нужно интегральное тождество, аналогичное принципу возможных перемещений. Его получаем из (1) и формулы Грина интегрирования по частям:

$$0 = \int_{\Omega} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} h) * q * d\Omega = \int_{\Omega} K \operatorname{grad} h * \operatorname{grad} q * d\Omega - \int_{\Gamma} K \partial h / \partial n * q * d\Gamma. \quad (3)$$

Здесь q - вариация p . Из равенства нулю интеграла по Γ получаем граничные условия:

На водоупоре $K \partial h / \partial n = 0$, это условие в МКЭ задавать не нужно, оно "само" выполнится;

На свободной поверхности

$$p = 0. \quad (4)$$

Подставив (2) в (3), получим нужное мне равенство МКЭ

$$\int_{\Omega} K / (\rho g) \operatorname{grad} p * \operatorname{grad} q * d\Omega + \int_{\Omega} K \partial q / \partial z * d\Omega = 0. \quad (5)$$

Второе слагаемое в (5) - "нагрузка". Из (5) и (4) с помощью ЛИРЫ найдем давление.

(Граничные условия нам удобнее задавать для давления, а не для напора. Неоднородное условие (4) тоже легко реализуется.)

Далее мы должны передать давление для дальнейшего расчета, используя зависимость для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + p \delta_{ij}.$$

Т.е., давление даст дополнительную нагрузку, которая вычисляется аналогично температурной. При расчете анализируем напряжения $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$.

Спасибо за внимание!



www.lira-soft.com

Москва, Дмитровское ш. д. 60а

Тел./факс +7 (499) 922-00-02

lira@lira-soft.com

Техническая поддержка

support@lira-soft.com